МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

А.В. БРАТИЩЕВ, А.В. МОРЖАКОВ

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Получено интегральное представление резольвенты оператора обобщенного дифференцирования, коэффициенты порождающей функции $d(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n+1)z^n$ *которого являются многочленом своего номера.*

***Ключевые слова**: резольвента, оператор обобщенного дифференцирования.*

Фиксируем многочлен

$$p(x) = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s = \sum_{k=0}^{s} \frac{\Delta_k}{k!} x(x-1)\ldots(x-k+1),$$

где $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_k \in \mathrm{C}$. $\forall k \in \mathrm{N}$, $p(k) \neq 0$, Δ_k – разделенная разность, построенная по узлам $0,1,\ldots,k$ и значениям $p(0),\ldots p(k)$. Очевидно, $\Delta_0 = a_s$, $\Delta_s = s!a_0$. Определим оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда – Леонтьева на пространстве многочленов по правилу $Dz^n := p(n)z^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ D1 := 0$.

ЛЕММА. *Пусть функция* $y(z)$ *голоморфна в односвязной области* $G \subseteq \mathbb{C}$ и $0 \in G$. Тогда $\forall z \in G$ $[Dy](z) = a_s \dfrac{y(z) - y(0)}{z} + \sum_{k=1}^{s} \dfrac{\Delta_k}{k!} z^{k-1} y^{(k)}(z).$

Предполагая D расширяющимся до линейного непрерывного оператора в пространстве $H(G)$ голомофных в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах, найдем ядро этого оператора. Согласно [1], для $0, z \subset \operatorname{int} C \subset G$

$$\left[Dt^n\right](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^n k(t,z)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k_l(z)}{t^{l+1}} dt = k_n(z) = p(n)z^{n-1}, \quad [D1](z) = k_0(z) \equiv 0,$$

откуда

$$k(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\frac{z^{n-1}}{t^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\varsigma^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{\Delta_k}{k!} n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\right)\varsigma^{n-1} =$$

$$= \Delta_0 \sum_{n=1}^{\infty}\varsigma^{n-1} + \sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} n\ldots(n-k+1)\varsigma^{n-1} = \frac{\Delta_0}{1-\varsigma} + \sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k \varsigma^{k-1}}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varsigma^n\right)^{(k)} = \frac{\Delta_0}{1-\varsigma} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k \varsigma^{k-1}}{(1-\varsigma)^{k+1}}.$$

Поэтому

$$k(t,z)=\frac{a_s}{t(t-z)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k z^{k-1}}{(t-z)^{k+1}},$$

откуда

$$\left[Dy\right](t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C y(t)\left(\frac{a_s}{t(t-z)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k z^{k-1}y(t)}{(t-z)^{k+1}}\right)\mathrm{dz}=a_s\frac{y(z)-y(0)}{z}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}z^{k-1}y^{(k)}.$$

В случае $a_s=0$ имеем представление, полученное другим способом в работе [2].

ТЕОРЕМА. *Пусть G есть звездная относительно нуля область. Тогда общее решение линейного операторного уравнения первого порядка в $H(G)$*

$$Dy-\lambda y=f \qquad (1)$$

имеет вид

$$Ce(\lambda z)+\frac{z}{a_0}\int_0^1\ldots\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^s}\left(\frac{\lambda}{a_0}(1-u_1)\ldots(1-u_s)z\right)^k\prod_{k=1}^{s}u_k^{-\lambda_k}f(u_1\ldots u_s z)\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_s$$

где $e(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{p(1)\ldots p(n)}$, $e(0):=1$*;* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ *- нули* $p(x)$*;*

$\mathrm{Re}\lambda_1,\ldots,\mathrm{Re}\lambda_s<1.$

Пусть $y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k z^k$ есть какое-либо решение в $H(G)$ уравнения (1).

Подставляя его в уравнение и используя лемму, получаем

$$a_s\sum_{n=1}^{\infty}y_n z^{n-1}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\Delta_k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}y_n z^{n-1}-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}y_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad a_s\sum_{n=0}^{\infty}y_{n+1}z^n+\sum_{n=0}^{s-1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\Delta_k C_{n+1}^k\right)y_{n+1}z^n+\sum_{n=s}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{s}\Delta_k C_{n+1}^k\right)y_{n+1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda y_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}f_n z^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в правой и левой частях последнего равенства, получаем такую формулу для коэффициентов:

$$y_n=\frac{\lambda^n y_0}{p(1)\ldots p(n)}+\frac{\lambda^{n-1}f_0}{p(1)\ldots p(n)}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1-l}f_l}{p(l+1)\ldots p(n)}+\cdots+\frac{\lambda f_{n-2}}{p(n-1)p(n)}+\frac{f_{n-1}}{p(n)}.$$

Таким образом,

$$y(z)=y_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cdot(\lambda z)^n}{p(1)\ldots p(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{n-1-k}f_k}{p(k+1)\ldots p(n)}\right)z^n=y_0e(\lambda z)+\sum_{k=0}^{\infty}f_k\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1-k}z^n}{p(k+1)\ldots p(n)}=$$

$$=y_0e(\lambda z)+\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda^{l-1}z^l}{p(k+1)\ldots p(l+k)}=y_0e(\lambda z)-\frac{f(z)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^n}{p(k+1)\ldots p(k+n)}=:$$

$=: y_o(z) + y_ч(z)$, где $y_o(z) := y_0 e(\lambda z)$ - общее решение уравнения $Dy - \lambda y = 0$, а $y_ч(z)$ - частное решение (1) в окрестности $z = 0$. Повторный ряд абсолютно сходится в окрестности $z = 0$, и порядок суммирования менять можно.

Проведем следующие преобразования в окрестности $z = 0$, воспользовавшись интегралом $\int_0^1 (1-u)^k u^{n-1-k-\lambda} du = \frac{k!}{(n-k-\lambda)\ldots(n-\lambda)}$:

$$\frac{z}{a_0}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s}\left(\frac{\lambda}{a_0}(1-u_1)\ldots(1-u_s)\right)^k z^k u_1^{-\lambda_1}\ldots u_s^{-\lambda_s} \sum_{k=0}^{\infty} f_k u_1^k \ldots u_s^k z^k du_1 \ldots du_s =$$

$$= \frac{z}{a_0}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{a_0}\right)^k \frac{(1-u_1)^k \ldots (1-u_s)^k}{(k!)^s} u_1^{n-k-\lambda_1}\ldots u_s^{n-k-\lambda_s} f_{n-k}\right) z^n du_1 \ldots du_s =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{a_0} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{a_0}\right)^k \frac{f_{n-k}}{(k!)^s}\int_0^1 \cdots \int_0^1 (1-u_1)^k \ldots (1-u_s)^k u_1^{n-k-\lambda_1}\ldots u_s^{n-k-\lambda_s} du_1 \ldots du_s =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{a_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{a_0^k} \frac{f_{n-k}}{(k!)^s} \frac{k!}{(n+1-k-\lambda_1)\ldots(n+1-\lambda_1)} \cdots \frac{k!}{(n+1-k-\lambda_s)\ldots(n+1-\lambda_s)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{n-k} f_k}{p(k+1)\ldots p(n+1)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} z^{n+1}}{p(k+1)\ldots p(k+1+n)} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} f(z) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{p(k+1)\ldots p(k+n)} \equiv y_ч(z).$$

Решение $y_ч(z)$ продолжается благодаря интегральному представлению в звездную область G. Резольвента оператора D в $H(G)$

$$(D - \lambda I)^{-1} f = \frac{z}{a_0}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^s}\left(\frac{\lambda}{a_0}(1-u_1)\ldots(1-u_s)\right)^k z^k u_1^{-\lambda_1}\ldots u_s^{-\lambda_s} f(u_1 \ldots u_z z) du_1 \ldots du_s.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Представление резольвенты для $s = 1, 2$ получено первым автором данной статьи; представление в другой форме [3] для $p(x) = x \pm 1$ и обобщение данного представления на общий случай s получено вторым автором.

Библиографический список

1. Köthe G. Dualitat in der Funktionentheorie // Z. reine angew. math. – 1953.- Bd. 191. – S. 30-49.

2. Леонтьев А. Ф. Обобщенные ряды экспонент. - М.: Наука, 1981. - 320 с.

3. Моржаков А.В. Об одном классе операторов обобщенного дифференцирования // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы. - Саратов: Научная книга, 2006. - С.122-123.

Материал поступил в редакцию 27.02.06.

A.V.BRATISHCHEV, A.V.MORZHAKOV

ON THE RESOLVENT OF SOME CLASS OF GENERALIZED DIFFERENTIAL OPERATOR

In the article is given representation of the resolvent $\left(D-\lambda I\right)^{-1}$ for generalized differential operator D with generating function $d(z):=\sum_{n=0}^{\infty} p(n+1)z^n$, $p(x):=\sum_{k=0}^{s} a_k x^k$ in the space of holomorphic functions.

БРАТИЩЕВ Александр Васильевич (р.1949), профессор (2001) кафедры математики ДГТУ, доктор физико-математических наук (1998). Окончил механико-математический факультет РГУ (1971).
Научные интересы: теория функций и функциональный анализ, теория управления.
Автор более 80 научных работ.

МОРЖАКОВ Антон Владимирович (р. 1980), аспирант кафедры математики ДГТУ. Окончил магистратуру механико-математического факультета РГУ (2003).
Автор 6 научных публикаций.